KZG Extractability based on ROM

KZG10 等多项式承诺证明多用于构造 SNARK，通常我们会将一个 Interactive Oracle Proof 中的多项式 Oracle 用 PCS 编译。

考虑到安全性，IOP 本身的 Knowledge Soundness 是容易保证的。然而，对于 IOP 用 PCS 编译之后得到的 SNARK，要证明它的 Knowledge Soundness 性质就没有那么容易了。

相比较于 IOP 中证明者发送包含一整个多项式的 Oracle 在 IOP 模型中，oracle 的长度和多项式是相同的，只不过验证者没有完全读取它），SNARK 中证明者只发送了多项式的承诺，该承诺只包含很少一部分信息：仅仅是多项式在几个点上的取值。

因此，我们只有保证多项式承诺本身是“可提取的“（Extractable），才能够保证 SNARK 的 Knowledge Soundness。（详细论证可以参考 Interactive Oracle Proofs by Eli Ben-Sasson et al.）

不幸的是，Kate 等人并没有证明 KZG10 协议具有 extractability，因此，要把 KZG10 用在构造 SNARK 上，我们必须对其安全性进行重新证明。

一系列之前的工作，包括 Sonic [MBK+19], Plonk [GWC19], Marlin [CHM+19] 提出了基于 non-falsifiable 假设（Knowledge Assumptions）或者基于理想群模型（Idealized Group Model）如GGM，AGM，证明 KZG10 方案满足 extractability 的方案。可以说，目前大部分基于 KZG 方案构造的 SNARK 系统都间接地依赖理想群模型。

与此同时，SNARK 系统在实现非交互式证明的时候还使用了 Fiat-Shamir 变换，这意味着它们还依赖于另一个强理想化模型，即随机预言机模型（ROM）。这种现状使我们处于一个相当糟糕的境地：我们的 SNARK 系统会同时具有两个模型的缺陷！近些年来，一些论文分别对它们进行了攻击。

而相对于理想群模型来说，ROM 的模型假设更弱（也就意味着安全性更强）。如果能够在 ROM 模型下证明 KZG 方案的安全性，就能够移除 SNARK 系统对理想群模型的依赖，从而增加我们对其安全性的信心。

在这个背景下，Lipmaa，Parisella，Siim 在今年发表了他们的工作 “Constant-Size zk-SNARKs in ROM from Falsifiable Assumptions”（下文简称 [LPS24]），向我们的目标推进了一大步。他们的贡献包括：

1. 基于一个新提出的 falsifiable 假设证明了 KZG 方案在 ROM 模型下的 special soundness 性质
2. 进一步证明了 KZG 方案满足 black-box extractability，以用于编译 IOP
3. 在证明 Plonk 在 ROM 模型下的 knowledge soundness 性质上取得了部分进展

本文中，我们将着重介绍第一点的工作。

Special Soundness

要介绍 special soundness，我们首先需要了解交互式证明以及其安全定义。

Interactive Proofs and Knowledge Soundness

【定义1：Public-coin Interactive Proofs】

一个证明目标关系 R，并由两方参与（证明者和验证者）的交互式协议被称为交互式证明（Interactive Proofs）,记作 $\Pi = (P, V)$，其中 P, V 分别是证明者和验证者算法。具体地，

- 证明者输入：公共 statement（记作 x），秘密 witness（记作 w）

- 验证者输入：公共 statement（记作 x）
- 证明者和验证者进行经过一系列交互，将所有交互的消息合集称为一个 transcript
- 验证者输出 1 表示接受，0 表示拒绝。

如果在交互中，所有验证者使用的随机数均为公开的，那么我们称该交互式协议为 Public-coin Interactive Proof。此外，假设在整个交互中证明者的发送了 k 条消息，验证者发送了 $k-1$ 条消息，那么我们称其为 $(2k-1)$-步协议。

众所周知，要保证一个交互式证明是安全的，它需要满足两个安全性质：

- **Completeness**：对于任意一个诚实执行协议的证明者 P，且**存在** w 令 (x,w) 满足关系 R，那么 P 能够通过执行协议令验证者输出接受。
- **Soundness**：对于任意一个可能恶意的证明者，且**不存在** w 令 (x,w) 满足关系 R，那么 P 不能通过执行协议令验证者输出接受。

上面两个安全性质保证了交互式证明基本的安全性，然而 Soundness 的定义只能够保证某个statement x 的确是属于关系 R 的，并不能达到一部分应用场景的安全需求。例如，在身份认证系统中，我们要求证明者证明其身份：即 "拥有" 对应公钥 pk 的私钥 sk 满足 $pk = sk \cdot G$。如果该证明只保证了 Soundness 性质，那么验证者只知道了 "pk 属于生成元 G 所构成的循环群 $\mathbb{G}$" 这一结论。但这个结论并不能保证证明者就一定拥有私钥 sk。实际上，我们可以在不知道 sk 的情况下证明 $pk \in \mathbb{G}$，例如用费马小定理。

因此我们需要一个更强的安全定义，即 **"**Knowledge Soundness"

【定义2：Knowledge Soundness】

对于一个交互式证明 $\Pi = (P,V)$，如果存在多项式时间算法 P^* 在不知道 x 对应 w 的情况下，能够以一个不可忽略的概率 ϵ 伪造证明令验证者接受，那么一定存在一个多项式时间提取器算法 E，该提取器将 P^* 作为一个可倒带的（rewindable）Oracle 调用，能够以不可忽略的概率 ϵ' 提取出一个满足 x 的 w。我们将 $|\epsilon' - \epsilon|$ 称作 soundness error，如果该 error 的大小可忽略不计，那么 Π 满足 Knowledge Soundness 性质。

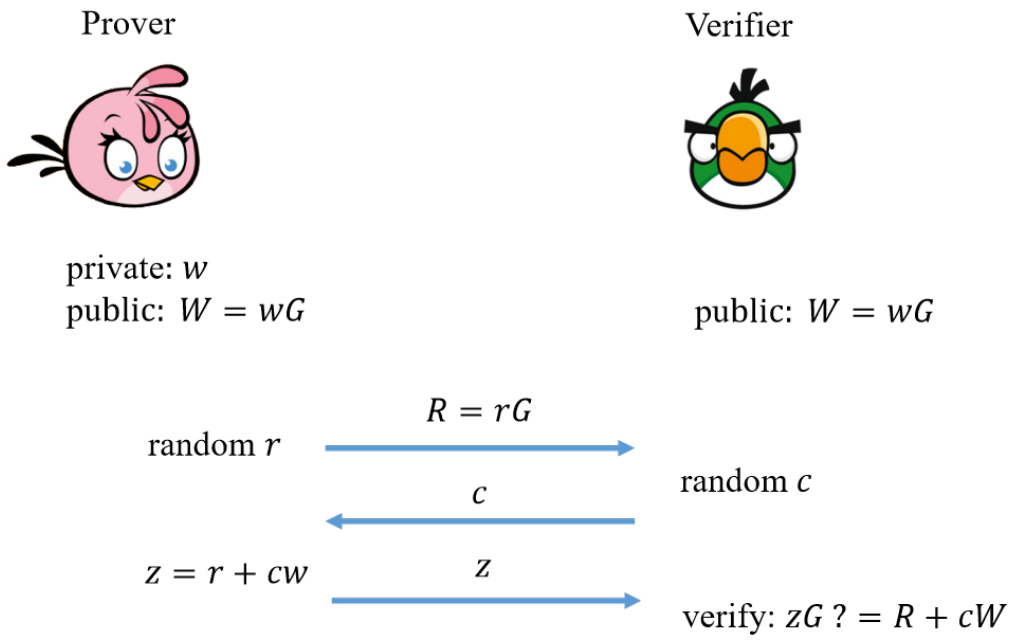
【注】如果一个 Public-coin Interactive Proof 对任意敌手都满足 Completeness 和 Soundness，那么我们称其为 Proof of Knowledge，如果Soundness只对多项式时间敌手满足，那么称其为 Argument of Knowledge。

可以看出，Knowledge Soundness 定义的关键在于强调构造提取器算法的可行性，也就是说，如果一个恶意证明者声称在不知道 w 的情况下伪造合法证明是可行的，那么基于该恶意证明者构造一个提取 w 提取器同样是可行的，这就与恶意证明者的声称是相矛盾的。从而保证，任何能输出合法证明的证明者，一定是"拥有"秘密值 w 的。

Knowledge Soundness 证明（以 Schnorr 协议为例）

前文已经给出了较为具体的 Knowledge Soundness 定义，那么我们该如何证明一个交互式证明协议满足该性质呢？显然，最直接的答案是构造一个提取器即可，但如何构造提取器是又是一门很深的学问（直白地说，LPS24 就是在做这件事）。为了方便解释 LPS24 的工作，我们先从一个相对简单的例子入手，来解释 knowledge soundness 的证明思路。

如下图所示 Schnorr 协议 [Sch90] 是一个 3步的交互式证明，在证明者和验证者两方之间进行，通过执行该协议，证明者能够向验证者证明她拥有一个满足离散对数关系 $W = wG$ 的秘密值 w



他们的交互过程如下

- 证明者生成随机值 $r \leftarrow \mathbb{F}$，并计算 $R = rG$ 发送给验证者
- 验证者生成随机值 $c \leftarrow \mathbb{F}$ 作为挑战值发送给证明者
- 证明者计算公开值 $z = r + cw$ 并发送给验证者

最后验证者根据在协议中收到的消息检查 $zG \stackrel{?}{=} R + cW$，方便起见，我们将 Schnorr 协议的 transcript 记作 (R, c, z)。

很容易证明，Schnorr 协议满足 Completeness 性质，我们在次不过多赘述。

接下来我们重点考虑 Knowledge Soundness 性质：

根据定义2，我们先给出结论：如果存在多项式时间算法 P^* 能够伪造合法的 Schnorr 证明，那么一定存在一个多项式时间提取器算法 E 通过倒带 P^*，能够提取出满足的秘密值 w。

那么该如何构造一个 E 来完成证明呢？要直接写出算法可能有些困难，我们不妨将该工作拆分成下面几步：

- 首先，我们构造一个子算法 E_{ss}，给定两个关于 W 的 transcripts 作为输入，记作 $(R, c_1, z_1), (R, c_2, z_2)$，要求 R 相同，c_1, c_2 不同，该子算法能够输出 w 满足 $W = wG$
- 接着，我们构造另一个子算法 E_{rw}，E_{rw} 将 P^* 作为 Oracle 进行调用，先获取一个合法的 transcript (R, c_1, z_1)，之后 E_{rw} 倒带 P^* 到 Schnorr 协议的第二步，尝试在相同 R 的情况下向 P^* 发送与 c_1 不同的挑战值，直到 P^* 输出另一个合法的 transcript (R, c_2, z_2)
- 最后， E 算法先运行 E_{rw} 获取两个满足条件的 transcripts 之后，再运行 E_{ss} 获得 w

【实现子算法 E_{ss}】

子算法 E_{ss} 的实现经常在各种论文的安全证明中出现，简单来说，E_{ss} 从两个输入 transcripts 中可以得到的公开值 z_1, z_2，假设 P^* 诚实地计算了这两个值，那么它们应该满足如下形式：

$$
\begin{aligned}
z_1 &= r + c_1 w' \\
z_2 &= r + c_2 w'
\end{aligned} \tag{1}
$$

解方程能够计算出 $w' = (z_1 - z_2)/(c_1 - c_2)$ 作为一个可能的秘密值，只需要检查 $w'G \stackrel{?}{=} W$ 即可得知其是否合法。如果相等，那么 E' 直接输出合法的秘密值 $w = w'$，算法完成。如果不相等，那么 E' 可以利用得到的结果构造一个归约来破解离散对数假设：

$$\frac{(z_1 - z_2)}{c_1 - c_2} G = W \tag{2}$$

由于破解离散对数假设的概率是可以忽略的，可以得到 E_{ss} 成功的概率和 P^* 成功的概率之差也是可以忽略的。

【获取 transcripts】

我们已经实现了第一步，接下来看第二步，其中要求算法 E_{rw} 调用 P^* 获取两个合法的 transcripts，需要注意的是，定义2中假设 P^* 每次运行只能以概率 ϵ 成功输出合法证明，也就是说 P^* 并不能每次都一定成功，此外，P^* 的运行时间假设在多项式时间内，这也就限制了 E_{rw} 不可能无限地调用 P^*，因为考虑算法的可行性，E_{rw} 的总运行时间也需要在多项式时间内。

所以，要顺利完成第二步，我们必须证明以下两点

1. E_{rw} 是一个多项式时间算法
2. E_{rw} 同样以一个不可忽略的概率成功输出 w

从 Knowledge Soundness 到 Special Soundness

论文 [Cra96] 对 E_{rw} 算法的性质给出了相当优雅的证明，由于其过程比较长，且和之后要介绍的 [LPS24] 内容类似，我们不在这此描述。总之，上述过程被归纳为一个引理：

【Rewinding Lemma】

对于一个3-步交互式证明 $\Pi = (P, V)$，如果存在多项式时间算法 P^* 能够以一个不可忽略的概率伪造合法 transcript，那么一定存在一个多项式时间的提取器算法 E_{rw} 通过倒带 P^* 得到另一个合法的 transcript（满足 R 相同，c 不同），E_{rw} 成功的概率同样是不可忽略的。

Rewinding Lemma 并不局限于 Schnorr-协议，实际上对任何3-步 Sigma 协议，提取器算法 E_{rw} 都可以倒带得到额外 $k-1$ 个（多项式数量）合法的 transcripts。

因此，Rewinding Lemma 实际上为构建具体协议的研究者们简化了证明 Knowledge Soundness 的过程，对于基于 Sigma 模型下设计的协议，我们通常只需要在安全证明中给出子算法 E_{ss} 的构造即可。为了形式化描述这一过程，密码学家们提出了一个新的定义，即 Special Soundness

定义3：Special Soundness

对于一个3-步交互式证明 $\Pi = (P, V)$，如果存在一个多项式时间提取算法 E_{ss}，给定其输入为 x 和两个合法的 transcript，记作 $(R, c_1, z_1), (R, c_2, z_2)$，能够输出秘密值 w，那么我们称 Π 满足Special Soundness。

【注】上面的定义也称作 2-special soundness，如果提取算法 E 的输入包含 k 个 transcripts，那么称作 k-special soundness

随着交互式证明的发展，研究者们也并不局限于只构造3-步协议，为了满足这一需求，Special Soundness 被进一步拓展到 $(2n-1)$-步交互式证明上，即，对于第 $j \in [1, n]$ 轮，提取器算法 E_{rw} 需要通过倒带 P^* 获取额外 $k_j - 1$ 个 transcripts，最终子算法 E_{ss} 的输入不再是一个简单的 transcript 向量，而是一个高度为 n 的 transcript 树，记作 $(k_1, \ldots, k_n)-$transcript tree。相应的该协议满足的性质被称为 $(k_1, \ldots, k_n)-$special soundness。关于这部分的具体定义，感兴趣的读者可以去阅读 [BCC+16] 和 [ACK21]，本篇介绍的 [LPS24] 只用到了 k-special soundness。

LPS24: KZG10 with Special Soundness

我们在之前的文章中已经介绍了 KZG10 多项式承诺方案的基本流程，在 [LPS24] 中，作者首先将 KZG10 方案写成符合交互式证明的形式，其中证明者拥有公共输入 $ck = (p, [(\sigma^i)_{i=0}^n]_1, [1, \sigma]_2)$（即参数 $p \leftarrow Pgen(1^\lambda)$ 和 SRS），秘密输入为 $f(X)$ 多项式，验证者只拥有公开输入 ck，两方进行如下交互协议：

- 证明者计算多项式承诺 $C = [f(\sigma)]_1$ 并发送给验证者
- 验证者选择随机 r 作为求值点发送给证明者
- 证明者计算并发送取值 $v = f(r)$，证明 $\pi = [q(\sigma)]_1$，其中 $q(X) = (f(X) - v)/(X - r)$

验证者根据交互数据检查 $e(C - [v]_1, [1]_2) \stackrel{?}{=} e(\pi, [\sigma - r]_2)$

类似的我们将双方之间的交互消息集合称作 transcript，如果某个transcript tr 能够通过验证，则称它是 accepting。进一步地，如果一个包含了 $n+1$ 个 transcripts 的向量 $\vec{tr}$ 满足下边两个要求，则它是 admissible 的：

1. $\vec{tr}$ 中的所有 transcript 包含的多项式承诺 C 相同
2. 对任意两个 transcript $tr_i, tr_j, i, j \in [0, n]$，他们的求值点不相同，即 $r_i \neq r_j$

除了定义交互形式的 KZG10 方案，[LPS24] 的作者还提出了一种新的困难问题假设，名为 Adaptive Rational Strong Diffie-Hellman 假设，简称 ARSDH 假设，其定义如下

【$(n+1)$-ARSDH 假设】

如果对于任何多项式时间敌手算法 A，给定参数 $p \leftarrow Pgen(1^\lambda)$，由随机值 σ 生成的 SRS，$([(\sigma^i)_{i=0}^n]_1, [1, \sigma]_2)$，要求 A 输出一对 $[g]_1, [\varphi]_1$，以及一个 $n+1$ 大小的集合 S，满足如下关系：

$$[g]_1 \neq [0]_1 \wedge e([g]_1, [1]_2) = e([\varphi]_1, [Z_S(\sigma)]_2) \tag{3}$$

如果 A 成功的概率是可以忽略的，那么称 $(n+1)$-ARSDH 假设对于双线性群参数生成算法 $p \leftarrow Pgen(1^\lambda)$成立。

ARSDH 是对一个已知的假设 RSDH 的放宽，RSDH 中要求 A 不能够自行选择集合 S。此外，[LPS24] 中还证明了 $(n+1)$-ARSDH 能够推出 $(n+1)$-SDH 假设（ARSDH implies SDH），即如果SDH 可以被破解，那么 ARSDH 也能够被破解。因为 SDH 能够推出 KZG10 的 evaluation binding 性质，所以我们得到如下结论

$$(n+1)\text{-ARSDH} \rightarrow (n+1)\text{-SDH} \rightarrow \text{KZG10's binding} \tag{4}$$

预备知识已经介绍完毕，接下来，我们按照前文介绍的 Schnorr 协议的证明思路，首先给出基于 transcripts 的提取器算法 E_{ss} 的构造，即证明 KZG 满足 special soundness，然后证明 rewinding lemma。

Special Soundness of KZG

首先给出定义：

对于一个多项式承诺方案 PC，如果存在一个多项式时间提取算法 E_{ss}，给定其输入为 ck 和一个长度为 $n+1$ 的 transcript 向量 $\vec{tr}$，满足

1. 任意 $tr_j \in \vec{tr}$ 满足 accepting（验证通过）
2. $\vec{tr}$ 满足 admissible（C 相同， r 不同）

E 能够输出秘密值 $f(X)$，满足 $C = \mathrm{Com}(ck; f) \wedge f(r_j) = v_j, \forall j \in [0, n]$，那么我们称 PC 满足 $(n+1)$-Special Soundness

显然，设计 E_{ss} 算法的思路是，尝试 $\vec{tr}$ 中提取出一个多项式 $f'(X)$，且 $f'(X)$ 要么是一个合法的秘密值，要么是一个破解 $(n+1)$-ARSDH 假设的实例。

我们不妨将每个 tr_j 对应的验证关系写出来：

$$
\begin{aligned}
e(C - [v_0]_1, [1]_2) &= e(\pi_0, [\sigma - r_0]_2) \\
&\vdots \\
e(C - [v_n]_1, [1]_2) &= e(\pi_n, [\sigma - r_n]_2)
\end{aligned} \tag{5}
$$

令 $I = [0, n]$，$L_0(X), \ldots, L_n(X)$ 是在集合 I 上对取值 $S = \{v_i\}_{i \in I}$ 插值的 Lagrange 多项式，$L_j(X)$ 的表达式为

$$
L_j(X) = \frac{\prod_{i \in I/\{j\}} (X - r_i)}{\prod_{i \in I/\{j\}} (r_j - r_i)} \tag{6}
$$

现在，将每个验证关系等式两边同时乘上 Lagrange 多项式在 σ 上的取值，例如第 $j \in [0, n]$ 个等式为

$$
e(C - [v_j]_1, [1]_2) \cdot L_j(\sigma) = e(\pi_j, [\sigma - r_j]_2) \cdot L_j(\sigma) \tag{7}
$$

并将所有 $n+1$ 个等式相加，可以得到

$$
e(\sum_{j \in I} (C - [v_j]_1) \cdot L_j(\sigma), [1]_2) = e(\sum_{j \in I} \pi_j \cdot L_j(\sigma), [\sigma - r_j]_2) \tag{8}
$$

令 $\sum_{j \in I} [v_j]_1 \cdot L_j(\sigma) = [L(\sigma)]_1$，左式为

$$
\begin{aligned}
LHS &= e(C - \sum_{j \in I} [v_j]_1 \cdot L_j(\sigma), [1]_2) \\
&= e(C - [L(\sigma)]_1, [1]_2)
\end{aligned} \tag{9}
$$

令 $\sum_{j \in I} \left(\pi_j / \prod_{i \in I/\{j\}} (r_j - r_i)\right) = \varphi$， 右式为

$$
\begin{aligned}
RHS &= e(\sum_{j \in I} \pi_j \cdot L_j(\sigma), [\sigma - r_j]_2) \\
&= e([\sum_{j \in I} q_j(\sigma) \cdot \frac{\prod_{i \in I/\{j\}} (\sigma - r_i)}{\prod_{i \in I/\{j\}} (r_j - r_i)}]_1, [\sigma - r_j]_2) \\
&= e([\sum_{j \in I} \frac{q_j(\sigma)}{\prod_{i \in I/\{j\}} (r_j - r_i)}]_1, [Z_S(\sigma)]_2) \\
&= e([\varphi]_1, [Z_S(\sigma)]_2)
\end{aligned} \tag{10}
$$

最终得到等式

$$
LHS = e(C - [L(\sigma)]_1, [1]_2) = e([\varphi]_1, [Z_S(\sigma)]_2) = RHS \tag{11}
$$

基于该等式，提取算法 E_{ss} 首先从 $n+1$ 个 transcripts 中获得 $v_0, \ldots, v_n$，并计算 $L(X)$ 以及 $[L(\sigma)]_1 = [\sum_{j \in I} v_j \cdot L_j(\sigma)]_1$。对比 $[L(\sigma)]_1 \stackrel{?}{=} C$，并根据结果进行如下操作

- 如果 $[L(\sigma)]_1 = C$，E_{ss} 直接输出 $L(X)$ 作为秘密多项式，算法完成。

- 如果 $[L(\sigma)]_1 \neq C$，E_{ss} 利用 $L(X)$ 构造一个归约来破解 $(n+1)\text{-ARSDH}$ 假设：
  - E_{ss} 计算 $[g]_1 = C - [L(\sigma)]_1$，并输出 $[g]_1, [\varphi]_1$ 作为破解 $(n+1)\text{-ARSDH}$ 的实例
  - 显然，上述实例满足

$$e([g]_1, [1]_2) = e([\varphi]_1, [Z_S(\sigma)]_2) \tag{12}$$

证明完毕。

Rewinding Lemma

上述证明保证了 KZG10 满足 $(n+1)$-special soundness，但要进一步保证 knowledge soundness，我们还需要证明 E_{rw} 通过倒带获取 $n+1$ 个满足的 transcripts 是可行的，即 rewinding lemma。

具体来说，对于如下 E_{rw} 算法，需要证明其再多项式时间内能够以不可忽略的概率成功

1. E_{rw} 随机选取 r 并调用 P^* 获得 tr_0
2. 检查 tr_0 的合法性，如果合法，则继续；如果不合法，则回到第 1 步选择另一个 r'
3. E_{rw} 运行循环算法，每一轮选取一个新的 r，并倒带 P^* 获得新的 transcript，终止条件为
   1. E_{rw} 得到 $(n+1)$ 个符合要求的 transcripts（即满足 accepting 和 admissible）$\rightarrow$ 算法成功
   2. E_{rw} 遍历了所有可能的 r，但仍没有得到 $(n+1)$ 个符合要求 transcripts $\rightarrow$ 算法失败

[LPS24] 论文中采取了和 [ACK21] 相同的证明思路，令 H 为一个布尔矩阵，其行索引为集合 $\{\vec{r} = (r_p, r_{ck}, r_A) \in \{0,1\}^{poly(\lambda)}\}$，其中 r_p, r_{ck}, r_A 分别是 $Pgen$ 算法，SRS 和敌手使用的随机数。H 的列索引为挑战值空间 $\mathbb{F}$。当 P^* 在某个随机数设置 $\vec{r}$ 下对挑战值 r 生成了合法的 transcript，我们便讲 H 中所对应的元素置为 1，即 $H[\vec{r}][r] = 1$。

接下来，我们分别对 E_{rw} 算法的成功概率和运行时间进行分析

【概率分析】

定义事件如下：

- 事件 A：tr_0 验证通过
- 事件 B：$\forall j \in [1, n]$，tr_j 验证通过

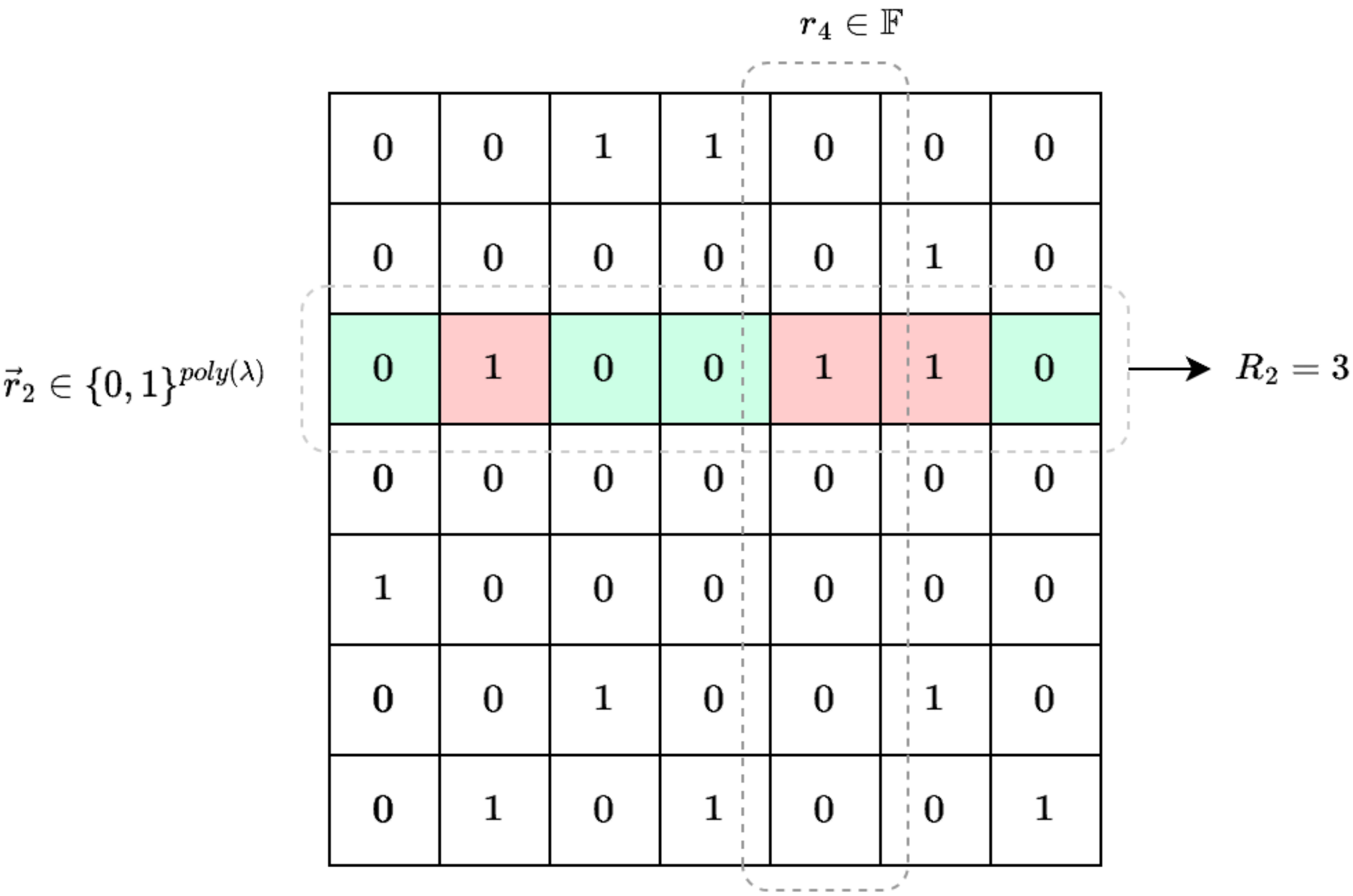
那么 E_{rw} 成功的概率计算即 $A \rightarrow B$ 的概率，即

$$\begin{aligned} Pr[A \rightarrow B] &= Pr[A \wedge (A \rightarrow B)] + Pr[\neg A \wedge (A \rightarrow B)] \\ &= Pr[A \wedge B] + Pr(\neg A) \end{aligned} \tag{13}$$

【注】：$A \rightarrow B$ 的真值表为

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

考虑概率 $Pr[A \wedge B]$， $A \wedge B$ 事件发生当且仅当 P^* 在随机参数 $\vec{r}$ 设置下输出合法 tr_0，且 $\vec{r}$ 所在行 $H[\vec{r}]$ 中至少有 $n+1$ 个 “1” 元素。



不妨设 R_j 为 H 中所有包含 j 个 “1” 元素的行的数量，例如上图中 $R_2=3$，所有包含 $\geq n+1$ 个 “1” 元素的行的数量可以计算为 $\sum_{j=n+1}^{|\mathbb{F}|} j \cdot R_j$ ，概率 $Pr[A \wedge B]$ 计算如下

$$\begin{aligned} Pr[A \wedge B] &= \frac{\sum_{j=n+1}^{|\mathbb{F}|} j \cdot R_j}{|\vec{r}| \cdot |\mathbb{F}|} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{|\mathbb{F}|} j \cdot R_j}{|\vec{r}| \cdot |\mathbb{F}|} - \frac{\sum_{j=0}^{n} j \cdot R_j}{|\vec{r}| \cdot |\mathbb{F}|} \\ &= Pr[A] - \frac{\sum_{j=0}^{n} j \cdot R_j}{|\vec{r}| \cdot |\mathbb{F}|} \end{aligned} \tag{14}$$

又因为 $\sum_{j=0}^{n} j \cdot R_j = \sum_{j=1}^{n} j \cdot R_j \leq \sum_{j=1}^{n} n \cdot R_j \leq n|\vec{r}|$

可以得到 $Pr[A \wedge B]$ 的下界

$$Pr[A \wedge B] \geq Pr[A] - \frac{n|\vec{r}|}{|\vec{r}||\mathbb{F}|} = Pr[A] - \frac{n}{|\mathbb{F}|} \tag{15}$$

最后得到 E_{rw} 成功概率的下界

$$\begin{aligned} Pr[A \to B] &= Pr[A \wedge B] + Pr(\neg A) \\ &\geq Pr[A] - \frac{n}{|\mathbb{F}|} + Pr[\neg A] \\ &= 1 - \frac{n}{|\mathbb{F}|} \end{aligned} \tag{16}$$

【运行时间分析】

对于 E_{rw} 算法，可以认为它的运行时间主要与调用 P^* 算法的时间相关，又因为 P^* 是多项式时间算法，因此我们只需要计算 E_{rw} 调用 P^* 算法的次数，记作 Q，就可以得出 E_{rw} 算法时间复杂度为 $poly(\lambda) \cdot Q$。

考虑 E_{rw} 第 2 步中成功获得合法的 tr_0（即事件 A 发生），E_{rw} 继续运行第 3 步中的循环，由于在每一轮循环中 E_{rw} 需要调用一次 P^* 算法，因此通过计算循环次数的期望即得到 Q。

我们先单独讨论计算循环次数这个问题：给定一个随机参数 $\vec{r}$，假设 H 中对应行向量 $H[\vec{r}]$ 包含 $\delta_{\vec{r}}|\mathbb{F}|$ 个 “1” 元素，$|\mathbb{F}|$ 是向量 $H[\vec{r}]$ 的长度。在已经选取 $H[\vec{r}]$ 中某一个 “1” 元素的前提下（即 tr_0），求解E_{rw} 再从剩余 $|\mathbb{F}| - 1$ 项中选取出 n 个 “1” 元素的期望次数。

要计算 Q 的期望，需要引入 Negative HyperGeometric distribution （NHG 分布）的概念

NHG 分布：给定一个包含 N 个球的盲盒，其中有 K 个球被标记，要求每次只摸出一个球，且不放回，直到摸出 $k \leq K$ 个被标记的球结束。将摸球结束时一共摸出的所有球的数量记作 X，X 的期望为 $E[NHG_{N,K,k}] = k(N+1)/(K+1)$。

相应的，当 $H[\vec{r}]$ 中包含的 “1” 元素大于 n 时，Q 符合 NHG 分布。假设每个 $H[\vec{r}]$ 中包含 $\delta_{\vec{r}}|\mathbb{F}|$ 个 “1” 元素，我们可以计算 Q 的期望如下：

- $H[\vec{r}]$ 至少包含 $n+1$ 个 “1” 元素，$E[Q|A \wedge \vec{r}] = E[NHG_{N,K,k}] + 1 = n/\delta_{\vec{r}} + 1$，其中 $N = \mathbb{F} - 1, K = \delta_{\vec{r}}|\mathbb{F}| - 1, k = n$
- $H[\vec{r}]$ 包含少于 $n+1$ 个 “1” 元素，即 $\delta_{\vec{r}}|\mathbb{F}| \leq n$，算法 E_{rw} 会不停执行循环直到遍历 $H[\vec{r}]$ 中所有元素，显然 $E[Q|A \wedge \vec{r}] = |\mathbb{F}| \leq n/\delta_{\vec{r}}$

上面考虑的是事件 A 发生的情况下，由于对任意 $\vec{r}$，$H[\vec{r}]$ 中包含 $\delta_{\vec{r}}|\mathbb{F}|$ 个 “1” 元素，因此 A 发生的概率为 $Pr[A] = \delta_{\vec{r}}$，计算

$$\begin{aligned} E[Q|\vec{r}] &= E[Q|A \wedge \vec{r}] \cdot Pr[A] + E[Q|\neg A \wedge \vec{r}] \cdot Pr[\neg A] \\ &\leq \frac{n}{\delta_{\vec{r}}} \cdot \delta_{\vec{r}} + 1 \cdot (1 - \delta_{\vec{r}}) = n + 1 - \delta_{\vec{r}} \leq n + 1 \end{aligned} \tag{17}$$

对于所有 $\vec{r} \in \{0,1\}^{poly(\lambda)}$，计算 Q 的期望如下

$$E[Q] = \sum_{\vec{r}} E[Q|\vec{r}] \cdot Pr[\vec{r}] \leq \sum_{1}^{|\vec{r}|} \frac{n+1}{|\vec{r}|} = n + 1 \tag{18}$$

证明完毕。

参考文献

[CHM+19] Chiesa, Alessandro, Yuncong Hu, Mary Maller, et al. "Marlin: Preprocessing zkSNARKs with Universal and Updatable SRS." *Cryptology ePrint Archive* (2019). https://eprint.iacr.org/2019/1047

[MBK+19] Maller Mary, Sean Bowe, Markulf Kohlweiss, et al. "Sonic: Zero-Knowledge SNARKs from Linear-Size Universal and Updatable Structured Reference Strings." *Cryptology ePrint Archive* (2019). https://eprint.iacr.org/2019/099

[GWC19] Ariel Gabizon, Zachary J. Williamson, Oana Ciobotaru. "PLONK: Permutations over Lagrange-bases for Oecumenical Noninteractive arguments of Knowledge." *Cryptology ePrint Archive* (2019). https://eprint.iacr.org/2019/953

[LPS24] Helger Lipmaa, Roberto Parisella, Janno Siim. "Constant-Size zk-SNARKs in ROM from Falsifiable Assumptions." Cryptology ePrint Archive (2024). https://eprint.iacr.org/2024/173

[ACK21] *Thomas Attema, Ronald Cramer, and Lisa Kohl* "A Compressed Sigma-Protocol Theory for Lattices" Cryptology ePrint Archive (2021). https://eprint.iacr.org/2021/307

[Sch90] Claus-Peter Schnorr. "Efficient identification and signatures for smart cards." In Gilles Brassard, editor, CRYPTO'89, volume 435 of LNCS, pages 239–252. Springer, Heidelberg, August 1990.

[Cra96] Ronald Cramer. "Modular Design of Secure yet Practical Cryptographic Protocols". PhD thesis, CWI and University of Amsterdam, 1996.